Universidad Tecnológica Nacional

Facultad Regional Buenos Aires

SEMINARIO UNIVERSITARIO 2024

SEGUNDO PARCIAL - 11/03/2024

Apellido y Nombre: ....

Número de Documento: .... Especialidad:..

TEMA 4

1	2	3	4	5	NOTA

- La duración del examen es de 150 minutos.
- Condición mínima de aprobación (6 puntos): 50% del examen bien resuelto.
- El examen no puede estar resuelto en lápiz.

EJERCICIO 1: Se lanza desde el suelo una pelota verticalmente hacia arriba con velocidad inicial $30\,m/s$. Un segundo después de deja caer desde una altura de $85\,m$ por acción de la gravedad otra pelota sobre la misma vertical que la primera. Hallar el módulo de la velocidad de la primera pelota cuando ambas se chocan. (Utilice $||\vec{g}|| = 10\,m/s^2$.)

EJERCICIO 2: Sea $f(x) = 3^{2x-6} + 1$, definida en todo $\mathbb{R}$. Se pide:

(a) Determinar f^{-1} indicando su dominio e imagen.

(b) Sabiendo que $g(x) = 3^x - 71$, resolver la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

EJERCICIO 3: Sea $f : D_f \to \mathbb{R} / f(x) = \dfrac{2x-1}{-x+3}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x + 1$. Determinar analítica y gráficamente las soluciones de la ecuación

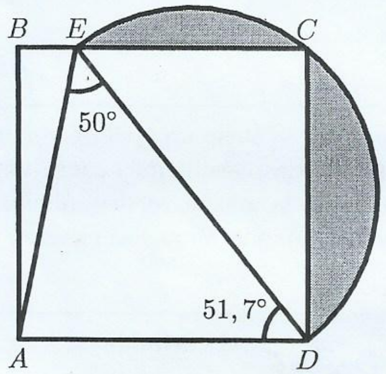
$$f(x) = g(x)$$

EJERCICIO 4:

a) Dado el sistema plano de fuerzas concurrentes, aplicado al punto O, determinar analíticamente la fuerza equivalente del sistema:
$\overrightarrow{F_1}\ (0,0) = (100\,N, 270°)$,$\overrightarrow{F_2}\ (0,0) = (-100,0)N$, $\overrightarrow{F_3}\ (0,0) = (100\,N, 60°)$,
$\overrightarrow{F_4}\ (0,0) = (-150\sqrt{3}, 150)N$.

b) Sea $\vec{v} = (a, b)$ un vector que forma un ángulo de 60° con el semieje positivo de las abscisas. Sabiendo que que dicho vector tiene componente $b < 0$ y que el módulo de $\vec{v}$ es 6. Hallar el valor de a.

EJERCICIO 5: Sobre el lado BC del cuadrado $ABCD$ se marca un punto E de forma tal que el ángulo $\angle AED$ mide 50° y el ángulo $\angle EDA$ mide $51,7°$ tal como se observa en la figura. Con centro en el punto medio del segmento ED se traza una semicircunferencia. Sabiendo que el área del cuadrado es de $42,25\,cm^2$, calcular el área de la región sombreada.

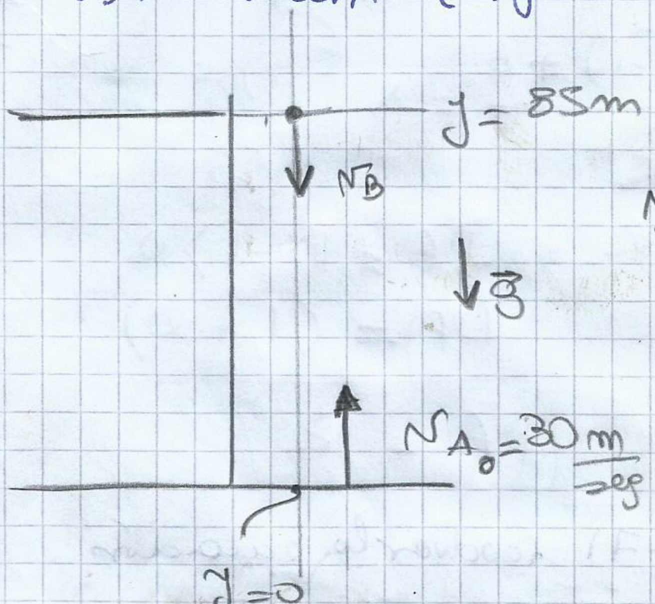


Seminario Universitario	2º parcial — tema 4	HOJA N 1 — FECHA 11-3-24

(1) Se lanza desde el suelo una pelota verticalmente hacia arriba con velocidad inicial 30 m/s.

Un segundo después se deja caer, desde una altura de 85 m por acción de la gravedad otra pelota sobre la misma vertical que la primera.

Hallar el módulo de la velocidad de la primera pelota cuando ambas se chocan. ($|\vec{g}| = 10\,m/seg^2$)



$v_{B_0} = 0\,\frac{m}{s}$ $\quad g = 10\,\frac{m}{seg^2}$

$$y_B(t) = 85\,m - 5\,\frac{m}{seg^2}(t-1)^2$$

$$y_A(t) = 30\,\frac{m}{seg}\,t - 5\,\frac{m}{seg^2}\,t^2$$

Punto de encuentro

$$y_A = y_B \rightarrow 85\,m - 5\,\frac{m}{seg^2}\underbrace{(t-1)^2}_{(t^2-2t+1)} = 30\,\frac{m}{seg}\,t - 5\,\frac{m}{seg^2}\,t^2$$

$$85\,m - \cancel{5\,\frac{m}{seg^2}\,t^2} + 10\,\frac{m}{seg}\,t - 5\,m = 30\,\frac{m}{seg}\,t - \cancel{5\,\frac{m}{seg^2}\,t^2}$$

$$85m - 5m = (30 - 10)\,\frac{m}{seg}\,t$$

$$80\,m = 20\,\frac{m}{seg}\,t \longrightarrow \boxed{t_e = 4\,seg}$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \Rightarrow a \cdot t + v_i = v_f = -10\,\frac{m}{seg^2}\,4\,seg + 30\,\frac{m}{seg}$$

$$-40 + 30$$

$$v_f = -10\,\frac{m}{seg} \qquad \boxed{|v_f| = 10\,m/seg}$$

② Sea $f(x) = 3^{2x-6} + 1$ definida en todo $\mathbb{R}$. Se pide:

a) Determinar f^{-1} indicando su dominio e imagen

$$y = 3^{2x-6} + 1 \longrightarrow y - 1 = 3^{2x-6}$$

$$\log_3(y-1) = \log_3(3^{2x-6})$$

$$\log_3(y-1) = (2x-6)\log_3(3) \quad 1$$

$$\frac{\log_3(y-1) + 6}{3} = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_3(x-1) + 6}{3} \longrightarrow Df = x - 1 > 0$$

$$\boxed{Df = (1, +\infty)}$$

$$\boxed{I(f) = \mathbb{R}}$$

b) Sabiendo que $g(x) = 3^x - 71$ resolver la ecuación

$$f(x) = g(x)$$

$$3^{2x-6} + 1 = 3^x - 71$$

$$\frac{3^{2x}}{3^6} - 3^x + 72 = 0$$

$$\frac{1}{3^6}\cdot(3^x)^2 - 3^x + 72 = 0$$

$3^x = t$

$$\frac{t^2}{729} - t + 72 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = 648 \\ t_2 = 81 \end{cases}$$

$$3^{x_1} = t_1 = 648 \longrightarrow \log_3(3^{x_1}) = \log_3(648) \longrightarrow \boxed{x_1 = 5,892}$$

$$3^{x_2} = t_2 = 81 \longrightarrow \boxed{x_1 = 4}$$

Seminario Universitario	2° parcial tema 4	HOJA N° 2 FECHA 11-3-24

③ Sea $f: Df \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \dfrac{2x-1}{-x+3}$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; g(x) = x+1$

Determinar analítica y gráficamente las soluc. de:

$$f(x) = g(x)$$

$x \neq 3$

f: AH: $y = -2$

AV = $x = 3$

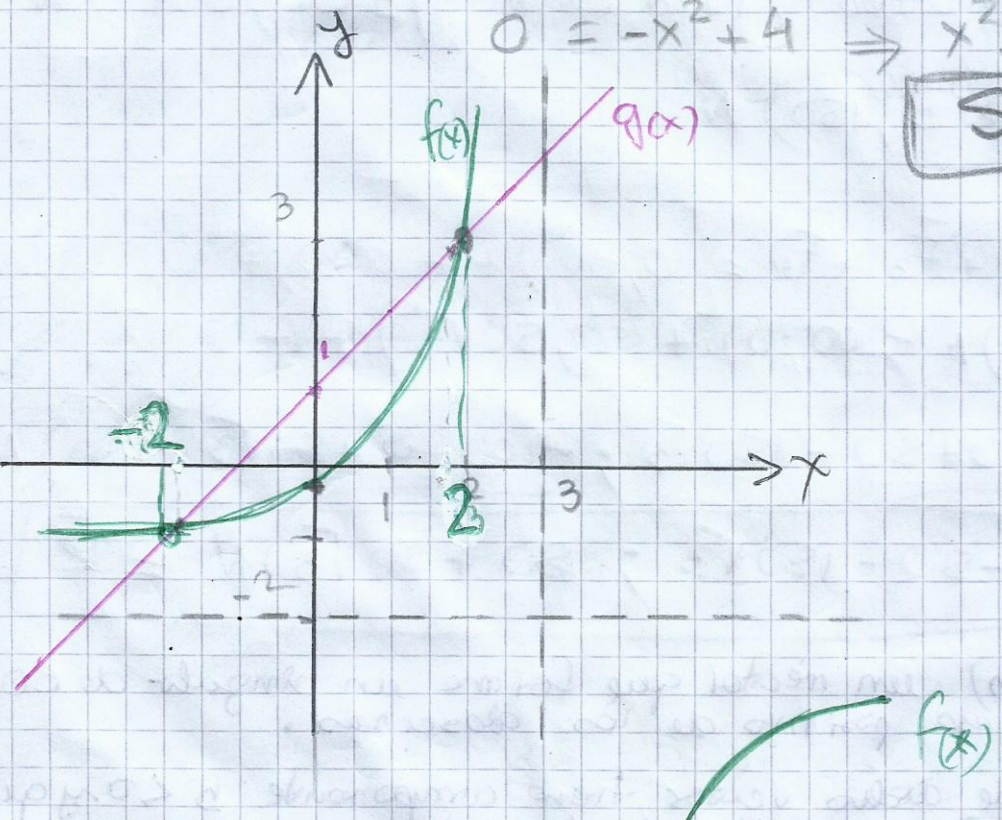
$$\frac{2x-1}{-x+3} = x+1$$

$$2x-1 = (x+1)(3-x)$$

$$2x-1 = 3x - x^2 + 3 - x$$

$$0 = -x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \to |x| = 2$$

$$\boxed{S = \{-2, 2\}}$$



$f_{(0)} = -\frac{1}{3}$

$g(x) = x+1$

④ a) Dado el sist. plano de fuerzas concurrentes, aplicados al punto O, determinar, analíticamente, la fuerza equivalente al sistema:

$\vec{F}_1 = (100\,N, 270°)$ $\quad \vec{F}_2 = (-100, 0)\,N$, $\vec{F}_3 = (100\,N, 60°)$

$\vec{F}_4 = (-150\sqrt{3}, 150)\,N$

$$\bar{F}_1 = (100\,N \cos(270°), 100\,N \operatorname{sen}(270°)) = \boxed{(0, -100)\,N = \bar{F}_1}$$

$$\vec{F}_2 = (-100; 0)\,N$$

$$\bar{F}_3 = (100\,N \cdot \cos(60°), 100\,N \cdot \operatorname{sen}(60°)) = \boxed{(50, 50\sqrt{3})\,N = \bar{F}_3}$$

$$\bar{F}_4 = (-150\sqrt{3}, 150)\,N$$

$$\vec{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 =$$

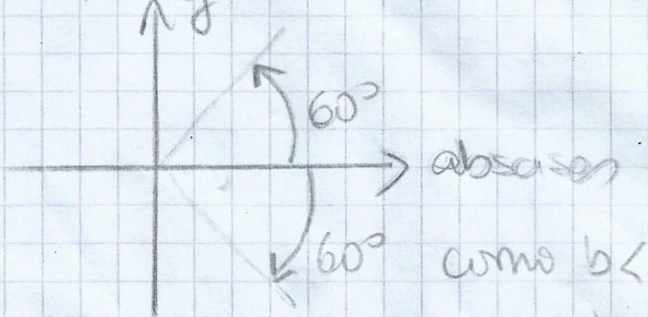
$$= [(0, -100) + (-100; 0) + (50, 50\sqrt{3}) + (-150\sqrt{3}, 150)]\,N =$$

$$= (\underbrace{0 - 100 + 50 - 150\sqrt{3}}; \underbrace{-100 + 0 + 50\sqrt{3} + 150})\,N$$

$$\boxed{(-50 - 150\sqrt{3}; 50 + 50\sqrt{3})\,N = \vec{R}}$$

b) Sea $\vec{v} = (a, b)$ un vector que forma un ángulo de 60° con el semieje positivo de las abscisas.

Sabiendo que dicho vector tiene componente $b < 0$ y que el módulo de $\vec{v}$ es 6, hallar el valor de a



como $b<0$ entonces estamos en el cuarto cuadrante $\rightarrow \alpha = -60°$

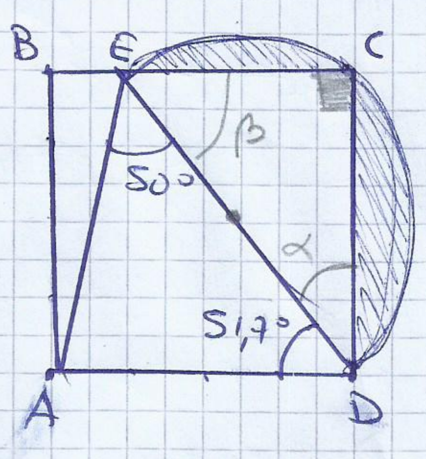
$\alpha = 300°$

$$\bar{v} = (a, b) = (\underbrace{6 \cos(300)}_{a}, 6 \operatorname{sen}(300))^{\circ}$$

$$\boxed{a = 3}$$

NOTA

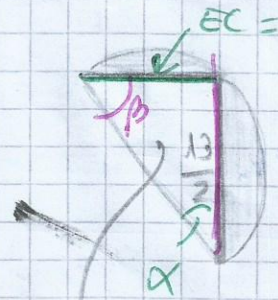
(5) Sobre el lado BC del cuadrado ABCD se marca un punto E de forma tal que el ángulo $\angle AED$ mide 50° y el ángulo $\angle EDA$ mide 51,7° tal como se observa en la fig.



Con centro en el punto medio del segmento ED se traza una semicircunferencia.

Sabiendo que el área del cuadrado es de 42,25 cm², calcular el área de la región sombreada.

$A_{\square} = 42{,}25\ cm = l^2 \rightarrow \boxed{l = \frac{13}{2}\ cm}$



$\alpha = 90° - 51{,}7° \rightarrow \boxed{\alpha = 38{,}3°}$

$\beta + \alpha = 90° \rightarrow \boxed{\beta = 51{,}7°}$

$A_{triangulo} = \frac{b \cdot h}{2}$ (h = l)

T. sen $\rightarrow \frac{13/2\ cm}{sen(\beta)} = \frac{b}{sen(\alpha)}$

$\frac{6{,}5\ cm}{sen(51{,}7°)} = \frac{b}{sen(38{,}3°)} \rightarrow \boxed{b = 5{,}13\ cm}$

$A_{\triangle} = \frac{b \cdot l}{2} = \underbrace{\frac{5{,}13\ cm \cdot \frac{13}{2}\ cm}{2}}_{16{,}6725\ cm^2}$

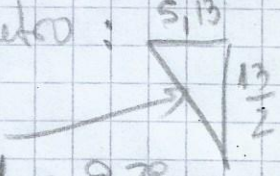
$A_{\triangle} = 16{,}6725\ cm^2$

$A_{semicirculo} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot (4{,}14\ cm)^2}{2} = 26{,}93\ cm^2$

$A = (26{,}93 - 16{,}67)\ cm^2$

$\boxed{A = 10{,}26\ cm^2}$

$\overline{ED}$ es el diámetro: x pitágoras



$d = 8{,}28\ cm \rightarrow r = 4{,}14\ cm$